MATEMÁTICA FINANCIERA

JUSTO ANDRÉS MERCADO QUINTELA

APLICACION TRIBUTARIA S.A.

APLICACIÓN TRIBUTARIA S.A.

Viamonte 1546 Piso 2º Of. 200
(1055) CIUDAD AUTÓNOMA DE BUENOS AIRES
Telefax: 4374-5418/6692/8855

E-mail: info@aplicacion.com.ar
Web: http://www.aplicacion.com.ar

Mercado Quintela, Justo Andrés
Matemática financiera, 1ª ed., Buenos Aires: Aplicación Tributaria, 2012.
154 p. ; 20x28 cm
ISBN: 978-987-1745-53-1
1. Matemática. I. Título
CDD 510
Fecha de catalogación: 24/04/2012

1ª Edición, Mayo de 2012
I.S.B.N. 978-987-1745-53-1

Este libro se terminó de imprimir en Mayo de 2012 en
APLICACIÓN TRIBUTARIA S.A.
Guido Spano 550
Lanús Oeste – Buenos Aires

A la memoria de mis padres Justo Benigno Mercado Luna y María Dominga Quintela

A mi hermana Rosa Vicenta

A mis sobrinos María Emilia y Carlos Andrés

Agradezco a los doctores: Juan Carlos Alonso, María Teresa Casparri, Juan Ramón Garnica Hervas, Aldo Gelso, María Cristina Meghinasso, María Alejandra Metelli, al Mg. Mario Luis Perossa y a la Editorial

PRÓLOGO

Tengo la satisfacción de prologar el libro de "*Matemática Financiera"* elaborado por el profesor Justo Andrés Mercado Quintela, colaborador de la cátedra a mi cargo de Administración Financiera en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires, donde tuve la oportunidad de conocer las cualidades morales y riqueza técnica de sus clases.

Justo A. Mercado Quintela vuelca en el presente libro su experiencia y conocimientos adquiridos en el dictado a nivel de grado universitario de las asignaturas Cálculo Financiero y Administración Financiera, por lo que este material será de suma utilidad en la tarea de orientar y acompañar en su aprendizaje al alumno que desea iniciarse en el conocimiento de la Matemática Financiera, a efectos de permitirle adquirir los conocimientos, capacidades y aptitudes necesarias para la toma de decisiones de inversión y financiamiento de las organizaciones, en las que deberá tener presente los conceptos de valor del dinero a través del tiempo, imprescindibles para una adecuada gestión en un contexto en constantes cambios y transformaciones tanto en los aspectos social, político, tecnológico, económico como financiero.

El profesor Mercado Quintela ha desarrollado con pulcritud matemática conceptos como las equivalencias de tasas nominales y efectivas, que suelen generar dificultades a los alumnos que se inician en el estudio de la disciplina, como la relación entre las tasas de interés y descuento. Introduce al lector con sencillez, pero sin por ello perder rigor matemático, en los diferentes tipos de rentas, incluso en las perpetuidades, constantes y crecientes, tan útiles para el profesional que debe valorizar empresas bajo el método de flujos de fondos descontados, o aquel que deba determinar el costo de capital. Importa señalar la metodología de análisis utilizada al introducir al estudioso en los diferentes sistemas de amortización, francés, americano y alemán. Finalmente, para una adecuada guía en el aprendizaje, el autor presenta un Anexo con conceptos fundamentales para una mejor interpretación de los desarrollos numéricos elaborados en el libro.

Sin duda el libro es una herramienta que facilitará a los alumnos alcanzar un mejor aprendizaje que les será de suma utilidad al aplicarlo en el mundo de los negocios.

Mis felicitaciones al docente por la labor realizada.

Juan Carlos Alonso
Dr. en Ciencias Económicas (UBA).
Director Escuela de Administración (Univ. Argentina J. F. Kennedy)
Profesor Titular Regular Administración Financiera (UBA)
Presidente de SADAF Docentes de Administración Financiera Asoc. Civil
Presidente del Instituto Actuarial Argentino

Banfield, Provincia de Buenos Aires, 30 de noviembre de 2011.

Sumario Analítico

CAPÍTULO 1

CAPÍTULO 2

CAPÍTULO 3

CAPÍTULO 4

CAPÍTULO 5

CAPÍTULO 6

ANEXO

BIBLIOGRAFÍA

CAPÍTULO 1

Cálculo Financiero

1. OPERACIONES FINANCIERAS

El concepto de capital puede tener distintas acepciones o significados, según el ámbito en que se utilice: economía, comercio, industria, finanzas, etcétera.

En el ámbito financiero, el capital lo constituye una cierta cantidad de dinero que se presta o se invierte por un tiempo determinado, al cual se le aplica una determinada tasa de interés.

Por ejemplo el inversor, por un tiempo determinado, pactado previamente, pone el dinero a disposición de un tercero, denominado deudor (lo *"alquila"*), con el propósito de obtener un beneficio. Este importe que se recibe, se denomina interés. La transacción descripta decimos que constituye una operación financiera.

El interés pactado estará en relación de la cantidad de dinero inicial y al tiempo que dure la operación.

Transcurrido el plazo que dura la operación hay varias alternativas a contemplar, por ejemplo que se convenga en retirar los intereses y renovar el capital por otro período de tiempo; o bien invertir el capital, más los intereses producidos.

Se trata es de establecer relaciones matemáticas (ecuaciones) entre los factores que intervienen (variables).

2. CAPITALIZACIÓN

Cuando a partir de una cierta cantidad inicial de dinero (capital), luego de transcurrido un cierto tiempo, se obtiene un valor final (monto), decimos que se ha efectuado una capitalización.

La evolución del capital en monto o capital final, se consigue por la acción de tres factores o variables:

- El capital inicial o inversión.
- El tiempo o período de duración de la operación.
- La tasa de interés.

Las operaciones pueden ser:

Según la forma de cálculo de los intereses:

1) Régimen simple.

2) Régimen compuesto.

Si es interés simple, los intereses se calculan siempre sobre el capital inicial. En el interés simple los intereses no producen interés.

Si es interés compuesto, los intereses se calculan siempre sobre el monto, es decir, sobre la acumulación de capital e interés obtenido en el período inmediato anterior.

En el interés compuesto, los intereses producen interés. Es decir, los intereses se reinvierten, sumándose al capital.

Teniendo en cuenta el período de la capitalización:

a) Capitalización discreta:

   1) Subperiódica (en períodos menores que la unidad de tiempo, por ejemplo un mes subperíodo de un año).

   2) Periódica (cuando coincide con el período unidad de tiempo, un año por ejemplo).

b) Capitalización continua:

   De esta forma, se pueden apreciar las variaciones de capital inicial en un número infinito de veces en el tiempo.

Si el interés es función del tiempo, el capital inicial se transforma en cada infinitésimo de tiempo, dando origen a distintos montos que varían infinitesimalmente. Estudio teórico.

En el interés simple: Como los intereses se calculan sobre el capital inicial o inversión, el hecho de capitalizar más frecuentemente no produce mayor capital final. El crecimiento es lineal, o sea el monto crece en progresión aritmética.

En el interés compuesto: Tiene gran importancia el número de veces que se acumula el interés al capital en el tiempo. A medida que la frecuencia de capitalización aumenta, tanto mayor será el capital final. El crecimiento es exponencial, o sea el monto crece en progresión geométrica.

2.1. Definición

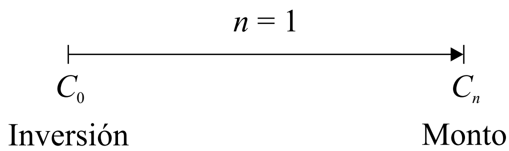
Si se dispone de un capital inicial C_0, que luego del período de tiempo $n = 1$ (por ejemplo, un mes) se transformó en un capital final C_n.

Suponemos que *"algo"* se le aplicó al capital inicial durante ese tiempo para poder llevar a cabo la transformación, es decir, llevarlo a un cierto capital final.

El capital final, al cabo de un cierto tiempo será:

Capital final o monto = Capital inicial o inversión + Intereses del período

Gráficamente:



Luego, el capital final obtenido, lo podemos expresar como:

$$\textbf{(1)} \quad C_1 = C_0 + I\,(0;1)$$

De donde despejamos el interés:

$$\textbf{(2)} \quad I\,(0;1) = C_1 - C_0$$

Variación absoluta entre el capital final y el capital inicial.

Observemos que el interés producido depende de los capitales inicial y final.

Aquí podríamos preguntarnos:¿es mucho o es poco? En realidad no lo sabemos. ¿Es mucho o es poco con respecto a qué parámetro de medición?

Dividiendo la expresión por el capital inicial, la independizamos del mismo, por lo que tendremos (dividimos ambos miembros por el capital inicial C_0).

$$\textbf{(3)} \quad \frac{I(0;1)}{C_0} = \frac{C_1}{C_0} - 1$$

Es la variación relativa respecto del capital inicial. Estamos comparando respecto del capital inicial.

En esta expresión, a la proporción $I(0;1)/C_0$ la definimos como un número i, que la conocemos como tasa de interés del período considerado.

Entonces:

$$\textbf{(4)} \quad \frac{I(0;1)}{C_0} = i$$

Por lo que podemos decir que la ecuación (3) quedará:

$$i = \frac{C_1}{C_0} - 1$$

O que es lo mismo:

$$\textbf{(5)} \quad 1 + i = \frac{C_1}{C_0}$$

En forma genérica:

$$\textbf{(6)} \quad 1 + i = \frac{C_p}{C_{p-1}}$$

Luego vemos que el capital inicial, durante un cierto período de tiempo, produjo un monto o capital final, ya que se le aplicó una tasa de interés, durante el período de tiempo considerado.

Obtenemos el resultado que genera la operación financiera mediante la siguiente expresión:

$$\text{Resultado} = \frac{\text{Interés}}{\text{Inversión}}$$

Para mejor ilustración nuestra expresaremos la tasa de interés con un subíndice, por ejemplo i_{365}, tasa anual. En rigor de verdad, es más correcto decir *"tasa efectiva de interés anual"*. Pero como nuestra unidad de tiempo la establecemos de antemano que va ser el año, directamente aludimos, entre paréntesis, a la frecuencia de capitalización. Por ejemplo $i(2)$, es decir capitaliza dos veces en el año, o capitaliza cada 180 días (si el año se toma 360 días).

La tasa de interés $i(m)$ en realidad, es el rendimiento o resultado de la operación, siendo m la frecuencia de capitalización.

Por lo general, cuando $m = 1$, o sea que solo capitaliza una vez en el año simplemente la expresamos como i, tasa efectiva anual vencida (TEA).

Por ejemplo, $i(2) = i_{180}$ (tasa de interés efectiva semestral vencida) o $i(12) = i_{30}$ (tasa de interés efectiva mensual vencida), etcétera.

3. INTERÉS SIMPLE

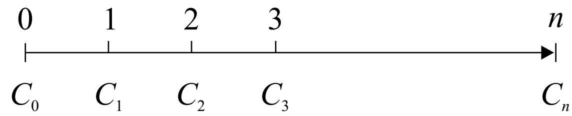
Si disponemos de un capital inicial C_0, que luego del período de tiempo n, durante el cual se le aplicó una tasa de interés i_{pc} (tasa efectiva de interés vencida), obtenemos un capital final C_n.

Suponemos que la tasa de interés aplicada en cada período es la misma (constante).

El capital final, al cabo de un cierto tiempo será:

$$\text{Capital final} = \text{Capital inicial} + \text{Interés}$$

Analicemos para cada valor de n y luego poder generalizar.



$$n_1 = 1 \qquad C_1 = C_0 + I(0,1) = C_0 + i.C_0$$

$$n_2 = 2 \qquad C_2 = C_0 + I(0,1) + I(1,2) = C_0 + i.C_0 + i.C_0 = C_0 + 2i.C_0$$

$$n_3 = 3 \qquad C_3 = C_0 + I(0,1) + I(1,2) + I(2,3) = C_0 + i.C_0.i.C_0 + i.C_0 = C_0 + 3i.C_0$$

$$n = n \qquad C_n = C_0.[1 + i.n]$$

Concluimos, que el capital final que se obtiene por un régimen simple se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$\textbf{(6)} \quad C_n = C_0.[1 + i.n]$$

Observamos que el monto crece en progresión aritmética, es decir, en cada período se suma al anterior un valor constante, la razón *"r"*, esto es, *"$i.C_0$"*, o sea $r = i \,.\, C_0$

Esta expresión, de cuatro variables en principio, nos sirve de base para calcular cualquiera de ellas teniendo como datos las tres restantes.

El tiempo y la tasa deben ser expresados en la misma periodicidad de tiempo.

Es decir:

Tiempo anual ® Tasa anual

Tiempo semestral ® Tasa semestral

Tiempo trimestral ® Tasa trimestral.

Tiempo mensual ® Tasa mensual, etcétera

($1 + i.n$) se denomina *"factor de capitalización simple"*.

Si queremos calcular el capital inicial, esto es:

$$C_0 = \frac{C_n}{[1 + i.n]}$$

Actualizamos, retrotraemos el capital final, en este caso $(1 + i.n)^{-1}$ funciona como *"factor de actualización"*.

Por otra parte, resulta interesante analizar las representaciones gráficas que pueden surgir de esta expresión, tomando algunas variables como constantes y viendo cómo evolucionan las demás.

3.1. Interés simple – Representación gráfica del capital final

La expresión de la función lineal (recta):

$$y = m.x + b$$

La expresión financiera:

$$C_n = C_0.i.n + C_0$$

Es decir:

$$C_n = C_0\ (1 + i.n)$$

Por comparación:

y”C_n

Variable dependiente”Monto

m”$C_0.i$

Coeficiente angular”Interés del período

x”n

Variable independiente”El tiempo

b”C_0

Ordenada al origen”Capital inicial

Si derivamos la expresión $C_n = C_0.i.n. + C_0$, la derivada primera nos indica crecimiento (pendiente positiva) o decrecimiento (pendiente negativa).

- Respecto de i:

$$\frac{dC_n}{di} = C_0.n \quad \text{Pendiente positiva, por lo tanto creciente}$$

- Respecto de n:

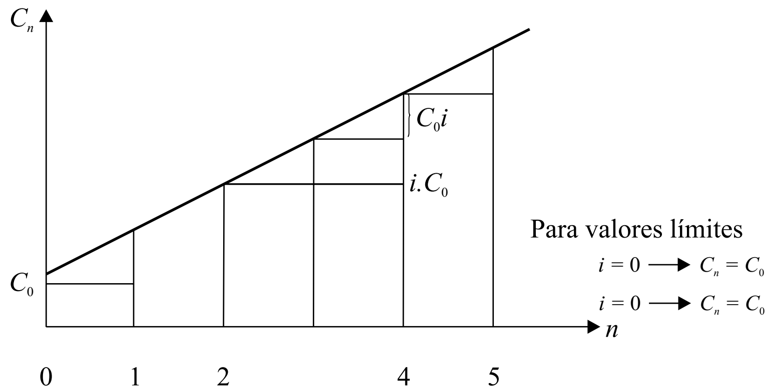
$$\frac{dC_n}{dn} = C_0.i \quad \text{Pendiente positiva, por lo tanto creciente}$$

La derivada segunda nos indica la concavidad de la función: si es positiva, cóncava hacia arriba; si es negativa, cóncava hacia abajo.

$$\frac{d^2C_n}{di^2} = 0 \quad \text{No tiene concavidad}$$

$$\frac{d^2C_n}{dn^2} = 0 \quad \text{No tiene concavidad}$$

Gráficamente, la representación de la línea recta de pendiente positiva (creciente).



- **Ejemplo**: Dado el capital de C_0 = $ 1.000, invertido por 6 períodos a una tasa de interés vencida del 4% periódica, hacer el cuadro de evolución de la operación.

Período	Capital $	Interés del período $	Monto $	Rendimiento o costo periódico
1	1.000	40	1.040	$i_1 = \frac{1.040 - 1.000}{1.000} = 0{,}040000$
2	1.000	40	1.080	$i_2 = \frac{1.080 - 1.040}{1.040} = 0{,}038462$
3	1.000	40	1.120	$i_3 = \frac{1.120 - 1.080}{1.080} = 0{,}037037$
4	1.000	40	1.160	$i_4 = \frac{1.160 - 1.120}{1.120} = 0{,}035714$
5	1.000	40	1.200	$i_5 = \frac{1.200 - 1.160}{1.160} = 0{,}034483$
6	1.000	40	1.240	$i_6 = \frac{1.240 - 1.200}{1.200} = 0{,}033333$
Totales		**240**		

Se puede apreciar que en cada período el rendimiento o costo efectivo no se mantiene constante (última columna) decrece en cada período de tiempo.

3.2. Interés simple – Tasa variable

Consideremos tres períodos de tiempo, no necesariamente iguales, en los que rigen tasas de interés vencido diferentes, y luego generalizaremos.

Si la tasa de interés vencida varía en cada período de tiempo:

0	$i_1 ; n_1$	1	$i_2 ; n_2$	2	$i_3 ; n_3$	3	
C_0		C_1		C_2		C_3	$n = n_1 + n_2 + n_3$

$$C_1 = C_0 + I(0;1) = C_0 + (i.C_0.n_1)$$

$$C_2 = C_1 + I(1;2) = C_1 + (i_2.C_0.n_2)$$

$$C_3 = C_2 + I(2;3) = C_2 + (i_3.C_0.n_3)$$

El capital final en 3 es igual al capital inicial más los intereses producidos en cada período de tiempo, con su respectiva tasa e interés, calculados siempre sobre el capital inicial C_0.

$$\begin{aligned} C_3 &= C_0 + C_0.i_1.n_1 + C_0.i_2.n_2 + C_0.i_3.n_3 \\ &= C_0[1 + i_1.n_1 + i_2 n_2 + i_3.n_3] \end{aligned} \Rightarrow C_3 = C_0.\left[1 + \sum_{h=1}^{3} i_h.n_h\right] \therefore$$

Generalizando para k períodos:

$$C_n = C_0.\left[1 + \sum_{h=1}^{k} i_h.n_h\right]$$

- **Ejemplo**: Con los siguientes datos, calcule el capital final y los intereses totales.
  - C_0 = $ 250
  - i_1 = 2% anual
  - i_2 = 4% anal
  - i_3 = 7% anual
  - n_1 = 3 meses
  - n_2 = 5 meses
  - n_3 = 2 meses

  Planteo:

$$C_3 = C_0.(1 + i_1.n_1 + i_2.n_2 + i_3.n_3) =$$

$$I(0;1) = C_0.i_1.n_1 = 250.0,02.\frac{3}{12} = 1,2500$$

$$I(1;2) = C_0.i_2.n_2 = 250.0,04.\frac{5}{12} = 4,1667$$

$$I(2;3) = C_0.i_3.n_3 = 250.0,07.\frac{2}{12} = 2,9167$$

$$I(0;3) = 1{,}2500 + 4{,}1667 + 2{,}9167 = \$\ 8{,}3333$$

Rta.: $C_3 = 258{,}33 \qquad I(0;3) = 8.3335$

3.3. Interés simple – Tasa media o tasa promedio

Es la tasa a la que debieran haberse colocado ciertos capitales iniciales, para que al cabo del período, produzcan un capital final igual a la suma de los capitales finales producido por cada uno de ellos.

Esto es, lo hacemos para tres capitales iniciales y luego generalizamos:

Buscamos una tasa $\bar{i}$, que si la aplicamos a los tres capitales iniciales juntos nos daría el mismo importe que si imponemos cada capital inicial por separado, con una tasa de interés distinta cada uno de ellos, esto es:

$$C_1 = C_{01}.(1 + i_1.n)$$

$$C_2 = C_{02}.(1 + i_2.n)$$

$$C_3 = C_{03}.(1 + i_3.n)$$

De aquí:

$$(C_{01} + C_{02} + C_{03}).(1 + \bar{i}.n) = C_{01}.(1 + i_1.n) + C_{02}.(1 + i_2.n) + C_{03}.(1 + i_3.n)$$

Aplicando distributiva:

$$(C_{01} + C_{02} + C_{03}) + (C_{01} + C_{02} + C_{03}).\bar{i}.n = C_{01} + C_{01}.i_1.n + C_{02} + C_{02}.i_2.n + C_{03} + C_{03}.i_3.n$$

Pasando al segundo miembro:

$$(C_{01} + C_{02} + C_{03}).\bar{i}.n = \cancel{C}_{01} + C_{01}.i_1.n + \cancel{C}_{02} + C_{02}.i_2.n + \cancel{C}_{03} + C_{03}.i_3.n - \cancel{C}_{01} - \cancel{C}_{02} - \cancel{C}_{03}$$

De donde despejamos:

$$\bar{i} = \frac{(C_{01}.i_1 + C_{02}.i_2 + C_{03}.i_3).n}{(C_{01} + C_{02} + C_{03}).n}$$

Generalizando para k capitales iniciales:

$$\bar{i} = \frac{\sum_{h=1}^{k} C_{0h}.i_h}{\sum_{h=1}^{k} C_{0h}}$$

- **Ejemplo**: Si se invierten las sumas de dinero de \$ 15.000, \$ 22.000 y \$ 23.000, con las siguientes tasas de interés: 4,50%, 5% y 6% efectivas mensuales respectivamente, por 90 días. Calcule la tasa media obtenida.

Solución:

Los capitales finales son:

$$C_1 = 15000.(1 + 0{,}045.3) = 17.025$$

$$C_2 = 22000.(1 + 0{,}05.3) = 25.300$$

$$C_3 = 23000.(1 + 0{,}06.3) = 27.140$$

La suma de los capitales iniciales:

$$15.000 + 22.000 + 23.000 = 60.000$$

La suma de los capitales finales:

$$17.025 + 25.300 + 27.140 = 69.465$$

Si calculamos la tasa promedio mensual aplicando la fórmula obtenida, tenemos:

$$\bar{i} = \frac{15000 \text{ x } 0{,}045 + 22000 \text{ x } 0{,}05 + 23000 \text{ x } 0{,}06}{15000 + 22000 + 23000} = \frac{3155}{60000} = 0{,}052583$$

- **Ejemplo**: Con estos datos:
  - C_0 = \$ 1
  - n = 120 días
  - i_{30} = 5%
  - i_{30} = 6%
  - i_{30} = 9%
  - i_{30} = 8%

Calcule la tasa media de la operación.

Planteo: Calculamos los intereses para cada período:

$$I(0;1) = i_1 \text{ x } C_0 \text{ x } n_1 = 0{,}05 \text{ x } 1 \text{ x } 1 = 0{,}05$$

$$I(1;2) = i_2 \text{ x } C_0 \text{ x } n_2 = 0{,}06 \text{ x } 1 \text{ x } 1 = 0{,}06$$

$$I(2;3) = i_3 \text{ x } C_0 \text{ x } n_3 = 0{,}09 \text{ x } 1 \text{ x } 1 = 0{,}09$$

$$I(3;4) = i_4 \text{ x } C_0 \text{ x } n_4 = 0{,}08 \text{ x } 1 \text{ x } 1 = 0{,}08$$

$$I(0;4) = I(0;1) + I(1;2) + I(2;3) + I(3;4) = 0{,}05 + 0{,}06 + 0{,}09 + 0{,}08 = 0{,}28$$

La tasa media es:

$$\bar{i} = \frac{0{,}05 + 0{,}06 + 0{,}09 + 0{,}08}{4} = 0{,}07 \text{ (promedio aritmético)}$$

4. INTERÉS COMPUESTO

En este caso, los intereses que se producen en cada período de tiempo son sumados al capital existente, el cual va a representar el capital inicial para el próximo período de tiempo, y así sucesivamente hasta completar el plazo total.

Buscamos la expresión que se obtiene cuando los intereses producidos en cada período son integrados al capital, es decir, cuando hay una capitalización de los intereses pasan a formar parte del capital para el período siguiente.

Graficamos la operación financiera:

$0 \quad i \quad 1 \quad i \quad 2 \quad i \quad n$

$C_1 = C_0 + I(0;1) \qquad C_2 = C_1 + I(1;2) \qquad \ldots \qquad C_n = C_{n-1} + I\,(n-1;n)$

C_0

$C_1 = C_0 + i.C_0$
$= C_0.[1 + i]$

$C_2 = C_1 + i.C_1$
$= C_0.[1 + i] + i.C_0.[1 + i]$
$= C_0.[1 + i]^2$

Y así hasta el período enésimo:

$$C_n = C_0.[1 + i]^n$$

Generalizamos:

- Para el primer período ($n = 1$):

$$C_1 = C_0 + i.C_0 = C_0.[1 + i]$$

- Para el segundo período ($n = 2$):

$$C_2 = C_1 + i.C_1 = C.(1 + i) + i.C_0.(1 + i) = C_0.(1 + i).(1 + i) = C_0.[1 + i]^2$$

- Para el tercer período ($n = 3$):

$$C_3 = C_2 + i.C_2 = C_1 + i.C_1 + i.[C_1 + i.C_1] = C_0.[C_0 + i]^3$$

....

- Para el período *“p”* ($n = p$):

$$C_p = C_{p-1} + i.C_{p-1} = C_{p-1}.[1 + i] = C_0.[C_0 + i]^p$$

- Para el período *“n”* ($n = n$):

$$C_n = C_{n-1} + i.C_{n-1} = C_0.[1 + i]^n$$

La expresión financiera para calcular el capital final en régimen de capitalización compuesta es:

$$\textbf{(7)} \quad C_n = C_0.(1 + i)^{\mathrm{n}}$$

Observemos que en este caso se trata de una progresión geométrica; cada elemento se va formando al multiplicar al anterior por la razón *“q”*, esto es, *“(1 + i)”*.

4.1. Interés compuesto – Representación gráfica del capital final

Esta expresión se corresponde con una función del tipo exponencial creciente, de la forma:

$$y = k.a^x$$

Siendo $a > 1$

Entonces, por comparación:

$$y = k.a^x$$

$$C_n = C_0.(1 + i)^{\mathrm{n}}$$

La similitud por cada término será:

y”C_n

Variable dependiente”El monto

k”C_0

Constante”Capital inicial

a”$1 + i$

Constante”Monto de $ 1 en un período de tiempo

x”n

Variable independiente”El tiempo

Gráficamente, si consideramos valores límites (o valores extremos):

$n = 0$®$C_n = C_0$

$i = 0$®$C_n = C_0$

n®¥Þ$C_0(1 + i)^n$ ®¥