

MATEMÁTICA FINANCIERA

JUSTO ANDRÉS MERCADO QUINTELA

APLICACION TRIBUTARIA S.A.

APLICACIÓN TRIBUTARIA S.A.

Viamonte 1546 Piso 2º Of. 200
(1055) CIUDAD AUTÓNOMA DE BUENOS AIRES
Telefax: 4374-5418/6692/8855

E-mail: info@aplicacion.com.ar
Web: <http://www.aplicacion.com.ar>

Mercado Quintela, Justo Andrés

Matemática financiera, 1ª ed., Buenos Aires: Aplicación Tributaria, 2012.

154 p. ; 20x28 cm

ISBN: 978-987-1745-53-1

I. Matemática. I. Título

CDD 510

Fecha de catalogación: 24/04/2012

©COPYRIGHT 2012 BY **APLICACIÓN TRIBUTARIA S.A.**

1ª Edición, Mayo de 2012

I.S.B.N. 978-987-1745-53-1

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL POR CUALQUIER MEDIO, YA
FUERE MECÁNICO, ELECTRÓNICO, ETCÉTERA, SIN AUTORIZACIÓN ESCRITA DEL
AUTOR Y DEL EDITOR

El presente trabajo ha sido minuciosamente revisado y corregido. No obstante, ni la Editorial ni el autor se hacen responsables, bajo ningún concepto, de ningún tipo de perjuicio que cualquier error y/u omisión puedan ocasionar.

Este libro se terminó de imprimir en Mayo de 2012 en
APLICACIÓN TRIBUTARIA S.A.

Guido Spano 550

Lanús Oeste – Buenos Aires

*A la memoria de mis padres Justo Benigno Mercado Luna y
María Dominga Quintela*

A mi hermana Rosa Vicenta

A mis sobrinos María Emilia y Carlos Andrés

*Agradezco a los doctores: Juan Carlos Alonso, María Teresa Casparri,
Juan Ramón Garnica Hervas, Aldo Gelso, María Cristina Meghinasso,
María Alejandra Metelli, al Mg. Mario Luis Perossa y a la Editorial*

PRÓLOGO

Tengo la satisfacción de prologar el libro de “*Matemática Financiera*” elaborado por el profesor Justo Andrés Mercado Quintela, colaborador de la cátedra a mi cargo de Administración Financiera en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires, donde tuve la oportunidad de conocer las cualidades morales y riqueza técnica de sus clases.

Justo A. Mercado Quintela vuelca en el presente libro su experiencia y conocimientos adquiridos en el dictado a nivel de grado universitario de las asignaturas Cálculo Financiero y Administración Financiera, por lo que este material será de suma utilidad en la tarea de orientar y acompañar en su aprendizaje al alumno que desea iniciarse en el conocimiento de la Matemática Financiera, a efectos de permitirle adquirir los conocimientos, capacidades y aptitudes necesarias para la toma de decisiones de inversión y financiamiento de las organizaciones, en las que deberá tener presente los conceptos de valor del dinero a través del tiempo, imprescindibles para una adecuada gestión en un contexto en constantes cambios y transformaciones tanto en los aspectos social, político, tecnológico, económico como financiero.

El profesor Mercado Quintela ha desarrollado con pulcritud matemática conceptos como las equivalencias de tasas nominales y efectivas, que suelen generar dificultades a los alumnos que se inician en el estudio de la disciplina, como la relación entre las tasas de interés y descuento. Introduce al lector con sencillez, pero sin por ello perder rigor matemático, en los diferentes tipos de rentas, incluso en las perpetuidades, constantes y crecientes, tan útiles para el profesional que debe valorizar empresas bajo el método de flujos de fondos descontados, o aquel que deba determinar el costo de capital. Importa señalar la metodología de análisis utilizada al introducir al estudioso en los diferentes sistemas de amortización, francés, americano y alemán. Finalmente, para una adecuada guía en el aprendizaje, el autor presenta un Anexo con conceptos fundamentales para una mejor interpretación de los desarrollos numéricos elaborados en el libro.

Sin duda el libro es una herramienta que facilitará a los alumnos alcanzar un mejor aprendizaje que les será de suma utilidad al aplicarlo en el mundo de los negocios.

Mis felicitaciones al docente por la labor realizada.

Juan Carlos Alonso
Dr. en Ciencias Económicas (UBA).
Director Escuela de Administración (Univ. Argentina J. F. Kennedy)
Profesor Titular Regular Administración Financiera (UBA)
Presidente de SADAF Docentes de Administración Financiera Asoc. Civil
Presidente del Instituto Actuarial Argentino

Banfield, Provincia de Buenos Aires, 30 de noviembre de 2011.

Sumario Analítico

CAPÍTULO 1

Cálculo Financiero	13
1. OPERACIONES FINANCIERAS	13
2. CAPITALIZACIÓN.....	13
2.1. Definición	14
3. INTERÉS SIMPLE	16
3.1. Interés simple – Representación gráfica del capital final.	18
3.2. Interés simple – Tasa variable	19
3.3. Interés simple – Tasa media o tasa promedio	21
4. INTERÉS COMPUESTO	23
4.1. Interés compuesto – Representación gráfica del capital final	24
4.2. Interés compuesto – Los intereses	27
4.3. Interés compuesto – Tasa variable	29
4.4. Interés compuesto – Tasa media de inversión de varios capitales	30
4.5. Cálculo del tiempo en que un capital se convierte en un múltiplo de sí mismo	34
5. TASA NOMINAL – TASA EFECTIVA	34
5.1. Capital final con tasa proporcional (con tasa nominal o tasa contractual).	36
6. TASAS EQUIVALENTES	37
6.1. Comparación interés simple e interés compuesto	41
6.2. Relación entre las sucesiones y el interés simple y el interés compuesto	42
6.3. Tasa activa – Tasa pasiva	43
7. CAPITALIZACIÓN CONTINUA.....	44
7.1. Interés continuo – Capital final con tasa continua	45
7.2. Interés continuo – Capital final con tasa equivalente	47

CAPÍTULO 2

Tasa de Descuento	49
1. CONCEPTO.....	49
2. VALOR ACTUAL Y DESCUENTO.....	49
3. CLASIFICACIÓN	50
3.1. Descuento comercial	50
3.2. Descuento racional o matemático	53
3.3. Descuento en el régimen de interés compuesto	54
4. DEDUCCIÓN FÓRMULA DEL VALOR EFECTIVO CON DESCUENTO COMPUESTO	55
4.1. Relaciones y comparaciones de la tasa de descuento (adelantada) con la tasa de interés (vencida)	56
5. RESUMEN ENTRE DESCUENTOS.....	59
6. VENCIMIENTO ÚNICO O COMÚN	59
6.1. Descuento bancario, comercial	60
6.2. Descuento racional.	61
6.3. Descuento compuesto	61
7. VENCIMIENTO MEDIO.....	62
8. RELACIÓN ENTRE EL VALOR ACTUAL Y DESCUENTO COMPUESTO CON EL CAPITAL A INTERÉS COMPUESTO.....	63
9. TASA NOMINAL – TASA EFECTIVA	64
9.1. Valor efectivo con tasa proporcional (tasa nominal).	65
9.2. Valor efectivo con tasa equivalente	66
10. DESCUENTO – ACTUALIZACIÓN CONTINUA.....	66
10.1. Descuento continuo con tasa equivalente de descuento.	66
10.2. Relación entre el VA y el capital final en régimen de CC.	68
10.3. Valor actual con descuento compuesto	68
11. RESUMEN.....	70

CAPÍTULO 3

Rentas	75
1. CONCEPTO.....	75
2. CLASIFICACIÓN	77
3. RENTAS CIERTAS – INMEDIATAS DE PAGOS CONSTANTES – CUOTA DE PAGO VENCIDO – VALOR ACTUAL	78
4. RENTAS CIERTAS – INMEDIATAS DE PAGOS CONSTANTES – CUOTA DE PAGO ADELANTADO – VALOR ACTUAL.....	81
5. RENTAS CIERTAS – DIFERIDAS DE PAGOS VENCIDOS	83
6. VALOR ACTUAL – RENTAS DIFERIDAS– DE CUOTAS (PAGOS) ADELANTADOS	84
7. VALOR FINAL – RENTA DE PAGOS VENCIDOS (VF DE PAGOS VENCIDOS).....	85

8. VALOR FINAL – RENTA DE PAGOS ADELANTADOS (VALUADO UN PERÍODO DESPUÉS DEL ÚLTIMO PAGO)	86	9. VALOR FINAL – RENTA DE PAGOS VENCIDOS ($M - N$ PERÍODOS DESPUÉS DEL ÚLTIMO PAGO).....	87
--	----	---	----

CAPÍTULO 4

Rentas de Términos Variables 89

1. RENTA EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA.....	89	1.6. Valor Final – Inmediata – Cuota vencida.....	95
1.1. Valor Actual – Inmediata – Cuota vencida ..	89	2. RENTA EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA.....	100
1.2. Valor Actual – Cuota adelantada	91	2.1. Valor Actual – Cuota vencida	100
1.3. Valor Actual – Diferida – Cuota vencida. . .	92		
1.4. Valor Actual – Diferida – Cuota adelantada .	92		
1.5. Valor Actual – Cuota vencida y con la amortización sea constante	93		

CAPÍTULO 5

. 107

1. RENTAS PERPETUAS.....	107	1.7. Valor Final – Diferida – Cuotas iguales – Adelantadas	109
1.1. Valor Actual – Inmediata – Cuotas iguales – Pagos vencidos	107	1.8. Relaciones	110
1.2. Valor Actual – Inmediata – Cuotas iguales – Pagos adelantados	107	2. RENTA EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA PERPETUA.....	110
1.3. Valor Final – Inmediata – Cuotas iguales – Vencidas	108	2.1. Valor actual – Cuota vencida	110
1.4. Valor Actual – Diferida – Cuotas iguales – Vencidas	108	2.2. Valor Actual – Cuota adelantada	110
1.5. Valor Final – Diferida – Cuotas iguales – Vencidas	109	3. RENTA EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA PERPETUA.....	111
1.6. Valor Actual – Diferida – Cuotas iguales – Adelantadas	109	3.1. De pagos vencidos	111
		3.2. De pagos adelantados.	111

CAPÍTULO 6

Sistemas de Amortización de Préstamos 113

1. CONCEPTO.....	113	2.1.11. Cálculo del total amortizado hasta un período determinado, incluido este, en función de la deuda inicial, de la tasa de interés y del tiempo	119
2. CLASIFICACIÓN	113	2.1.12. Cálculo del total amortizado hasta un período determinado, incluido este, en función de la periodicidad o cuota de servicio, de la tasa de interés y del tiempo.	120
2.1. Sistema de amortización acumulativa – Sistema francés	113	2.1.13. Cálculo de la cuota interés correspondiente a un período determinado.	120
2.1.1. Determinación de la deuda inicial.	114	2.1.14. Acumulado de intereses hasta un período determinado, incluido este.	123
2.1.2. Cálculo de la amortización de una cuota cualesquiera.	115	2.1.15. Intereses acumulados entre dos cuotas intermedias, la cuota “ p ” y la cuota “ $p + h$ ”	124
2.1.3. Acumulado de las primeras “ p ” amortizaciones.	117	2.1.16. Intereses acumulados entre las últimas “ $n - p$ ” cuotas	125
2.1.4. Acumulado de las “ $p + h$ ” amortizaciones intermedias.	117	2.1.17. Utilización del fondo amortizante para el cálculo de los elementos de la fórmula de las amortizaciones	126
2.1.5. Acumulado de las últimas “ $n - p$ ” amortizaciones.	118	2.1.18. Saldo de deuda – Método prospectivo	127
2.1.6. Acumulado de las “ n ” amortizaciones.	118		
2.1.7. Acumulado de las primeras “ p ” cuotas de intereses	118		
2.1.8. Acumulado de las “ $p + h$ ” cuotas de interés intermedias	119		
2.1.9. Acumulado de las últimas “ $n - p$ ” cuotas de intereses.	119		
2.1.10. Acumulado de las “ n ” cuotas de interés	119		

2.1.19. Saldo de deuda – Método de amortizaciones acumuladas	127	según sean los de las tasa de interés	135
2.1.20. Saldo de deuda, en un momento determinado, incluido este	128	2.2.2.8. Cálculo del valor del préstamo en función de la cuota de servicio	135
2.1.21. Saldo de deuda por el método retrospectivo	129	2.2.2.9. Cálculo del número de cuotas (o servicios)	136
2.1.22. Tiempo medio de reembolso	129	2.3. Sistema de amortizaciones constantes – Sistema alemán	136
2.2. Sistema de amortización – Sistema americano o de dos tasas	132	2.3.1. Características	136
2.2.1. Características	132	2.3.2. Cálculo de la cuota	136
2.2.2. Cálculo de la cuota o servicio que hará posible el cumplimiento de los compromisos contraídos por el deudor	133	2.3.3. Cálculo de la deuda inicial	137
2.2.2.1. Cuota o servicio completo	134	2.3.4. Cálculo de las cuotas sucesivas o siguientes	137
2.2.2.2. Los intereses activos	134	2.3.5. Cálculo del total amortizado hasta cuota “ p ”	138
2.2.2.3. Los intereses pasivos	135	2.3.6. Cálculo del total amortizado hasta cuota “ n ”	138
2.2.2.4. El saldo de deuda en un momento intermedio “ p ”	135	2.3.7. Cálculo del interés para un período determinado	139
2.2.2.5. El saldo del fondo acumulado en un momento intermedio “ p ”	135	2.3.8. Intereses acumulados hasta la cuota “ p ”	139
2.2.2.6. Cálculo de la tasa “ i ”	135	2.3.9. Intereses acumulados entre dos cuotas cualesquiera	140
2.2.2.7. Discusión de los valores del servicio completo,		2.4. Sistema directo sistema tasa directa cargada	141

ANEXO

.		143	
1. LOGARITMOS. DEFINICIÓN	143	2.7. Convergencia y divergencia	147
2. PROGRESIONES – SUCESIONES	144	2.8. Propiedades del límite finito de sucesiones	147
2.1. Sucesión monótona creciente	144	3. OPERACIONES CON LÍMITES	147
2.2. Sucesión monótona decreciente	145	4. EL NÚMERO e	148
2.3. Límite finito de una sucesión	145	5. BINOMIO DE NEWTON	149
2.4. Límite finito	146	6. DESARROLLO EN SERIE DE TAYLOR	150
2.5. Límite infinito de una sucesión	146	7. FÓRMULA DE TAYLOR	150
2.6. Límite infinito	146		

BIBLIOGRAFÍA

.		153
-----------	--	-----

CAPÍTULO 1

Cálculo Financiero

1. OPERACIONES FINANCIERAS

El concepto de capital puede tener distintas acepciones o significados, según el ámbito en que se utilice: economía, comercio, industria, finanzas, etcétera.

En el ámbito financiero, el capital lo constituye una cierta cantidad de dinero que se presta o se invierte por un tiempo determinado, al cual se le aplica una determinada tasa de interés.

Por ejemplo el inversor, por un tiempo determinado, pactado previamente, pone el dinero a disposición de un tercero, denominado deudor (lo “*alquila*”), con el propósito de obtener un beneficio. Este importe que se recibe, se denomina interés. La transacción descrita decimos que constituye una operación financiera.

El interés pactado estará en relación de la cantidad de dinero inicial y al tiempo que dure la operación.

Transcurrido el plazo que dura la operación hay varias alternativas a contemplar, por ejemplo que se convenga en retirar los intereses y renovar el capital por otro período de tiempo; o bien invertir el capital, más los intereses producidos.

Se trata es de establecer relaciones matemáticas (ecuaciones) entre los factores que intervienen (variables).

2. CAPITALIZACIÓN

Cuando a partir de una cierta cantidad inicial de dinero (capital), luego de transcurrido un cierto tiempo, se obtiene un valor final (monto), decimos que se ha efectuado una capitalización.

La evolución del capital en monto o capital final, se consigue por la acción de tres factores o variables:

- ◆ El capital inicial o inversión.
- ◆ El tiempo o período de duración de la operación.
- ◆ La tasa de interés.

Las operaciones pueden ser:

Según la forma de cálculo de los intereses:

- 1) Régimen simple.
- 2) Régimen compuesto.

Si es interés simple, los intereses se calculan siempre sobre el capital inicial. En el interés simple los intereses no producen interés.

Si es interés compuesto, los intereses se calculan siempre sobre el monto, es decir, sobre la acumulación de capital e interés obtenido en el período inmediato anterior.

En el interés compuesto, los intereses producen interés. Es decir, los intereses se reinvierten, sumándose al capital.

Teniendo en cuenta el período de la capitalización:

a) Capitalización discreta:

- 1) Subperiódica (en períodos menores que la unidad de tiempo, por ejemplo un mes subperíodo de un año).
- 2) Periódica (cuando coincide con el período unidad de tiempo, un año por ejemplo).

b) Capitalización continua:

De esta forma, se pueden apreciar las variaciones de capital inicial en un número infinito de veces en el tiempo.

Si el interés es función del tiempo, el capital inicial se transforma en cada infinitésimo de tiempo, dando origen a distintos montos que varían infinitesimalmente. Estudio teórico.

En el interés simple: Como los intereses se calculan sobre el capital inicial o inversión, el hecho de capitalizar más frecuentemente no produce mayor capital final. El crecimiento es lineal, o sea el monto crece en progresión aritmética.

En el interés compuesto: Tiene gran importancia el número de veces que se acumula el interés al capital en el tiempo. A medida que la frecuencia de capitalización aumenta, tanto mayor será el capital final. El crecimiento es exponencial, o sea el monto crece en progresión geométrica.

2.1. Definición

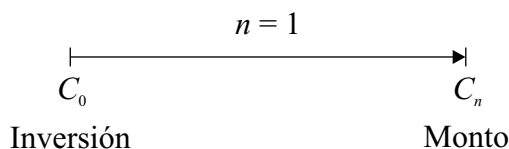
Si se dispone de un capital inicial C_0 , que luego del período de tiempo $n = 1$ (por ejemplo, un mes) se transformó en un capital final C_n .

Suponemos que “algo” se le aplicó al capital inicial durante ese tiempo para poder llevar a cabo la transformación, es decir, llevarlo a un cierto capital final.

El capital final, al cabo de un cierto tiempo será:

Capital final o monto = Capital inicial o inversión + Intereses del período

Gráficamente:



Luego, el capital final obtenido, lo podemos expresar como:

$$(1) \quad C_1 = C_0 + I(0;1)$$

De donde despejamos el interés:

$$(2) \quad I(0;1) = C_1 - C_0$$

Variación absoluta entre el capital final y el capital inicial.

Observemos que el interés producido depende de los capitales inicial y final.

Aquí podríamos preguntarnos: ¿es mucho o es poco? En realidad no lo sabemos. ¿Es mucho o es poco con respecto a qué parámetro de medición?

Dividiendo la expresión por el capital inicial, la independizamos del mismo, por lo que tendremos (dividimos ambos miembros por el capital inicial C_0).

$$(3) \quad \frac{I(0;1)}{C_0} = \frac{C_1}{C_0} - 1$$

Es la variación relativa respecto del capital inicial. Estamos comparando respecto del capital inicial.

En esta expresión, a la proporción $I(0;1)/C_0$ la definimos como un número i , que la conocemos como tasa de interés del período considerado.

Entonces:

$$(4) \quad \frac{I(0;1)}{C_0} = i$$

Por lo que podemos decir que la ecuación (3) quedará:

$$i = \frac{C_1}{C_0} - 1$$

O que es lo mismo:

$$(5) \quad 1 + i = \frac{C_1}{C_0}$$

En forma genérica:

$$(6) \quad 1 + i = \frac{C_p}{C_{p-1}}$$

Luego vemos que el capital inicial, durante un cierto período de tiempo, produjo un monto o capital final, ya que se le aplicó una tasa de interés, durante el período de tiempo considerado.

Obtenemos el resultado que genera la operación financiera mediante la siguiente expresión:

$$\text{Resultado} = \frac{\text{Interés}}{\text{Inversión}}$$

Para mejor ilustración nuestra expresaremos la tasa de interés con un subíndice, por ejemplo i_{365} , tasa anual. En rigor de verdad, es más correcto decir “*tasa efectiva de interés anual*”. Pero como nuestra unidad de tiempo la establecemos de antemano que va ser el año, directamente aludimos, entre paréntesis, a la frecuencia de capitalización. Por ejemplo $i(2)$, es decir capitaliza dos veces en el año, o capitaliza cada 180 días (si el año se toma 360 días).

La tasa de interés $i(m)$ en realidad, es el rendimiento o resultado de la operación, siendo m la frecuencia de capitalización.

Por lo general, cuando $m = 1$, o sea que solo capitaliza una vez en el año simplemente la expresamos como i , tasa efectiva anual vencida (TEA).

Por ejemplo, $i(2) = i_{180}$ (tasa de interés efectiva semestral vencida) o $i(12) = i_{30}$ (tasa de interés efectiva mensual vencida), etcétera.

3. INTERÉS SIMPLE

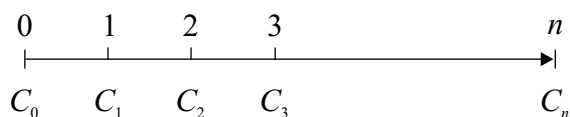
Si disponemos de un capital inicial C_0 , que luego del período de tiempo n , durante el cual se le aplicó una tasa de interés i_{pc} (tasa efectiva de interés vencida), obtenemos un capital final C_n .

Suponemos que la tasa de interés aplicada en cada período es la misma (constante).

El capital final, al cabo de un cierto tiempo será:

$$\text{Capital final} = \text{Capital inicial} + \text{Interés}$$

Analicemos para cada valor de n y luego poder generalizar.



$$n_1 = 1 \quad C_1 = C_0 + I(0,1) = C_0 + i.C_0$$

$$n_2 = 2 \quad C_2 = C_0 + I(0,1) + I(1,2) = C_0 + i.C_0 + i.C_0 = C_0 + 2i.C_0$$

$$n_3 = 3 \quad C_3 = C_0 + I(0,1) + I(1,2) + I(2,3) = C_0 + i.C_0 + i.C_0 + i.C_0 = C_0 + 3i.C_0$$

$$n = n \quad C_n = C_0.[1 + i.n]$$

Concluimos, que el capital final que se obtiene por un régimen simple se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$(6) \quad C_n = C_0.[1 + i.n]$$

Observamos que el monto crece en progresión aritmética, es decir, en cada período se suma al anterior un valor constante, la razón “ r ”, esto es, “ $i.C_0$ ”, o sea $r = i.C_0$

Esta expresión, de cuatro variables en principio, nos sirve de base para calcular cualquiera de ellas teniendo como datos las tres restantes.

El tiempo y la tasa deben ser expresados en la misma periodicidad de tiempo.

Es decir:

Tiempo anual ® Tasa anual

Tiempo semestral ® Tasa semestral

Tiempo trimestral ® Tasa trimestral.

Tiempo mensual ® Tasa mensual, etcétera

$(1 + i.n)$ se denomina “*factor de capitalización simple*”.

Si queremos calcular el capital inicial, esto es:

$$C_0 = \frac{C_n}{[1 + i.n]}$$

Actualizamos, retrotraemos el capital final, en este caso $(1 + i.n)^{-1}$ funciona como “*factor de actualización*”.

Por otra parte, resulta interesante analizar las representaciones gráficas que pueden surgir de esta expresión, tomando algunas variables como constantes y viendo cómo evolucionan las demás.

3.1. Interés simple – Representación gráfica del capital final

La expresión de la función lineal (recta):

$$y = m.x + b$$

La expresión financiera:

$$C_n = C_0.i.n + C_0$$

Es decir:

$$C_n = C_0 (1 + i.n)$$

Por comparación:

$$y^n C_n$$

Variable dependiente" Monto

$$m^n C_0.i$$

Coefficiente angular" Interés del período

$$x^n n$$

Variable independiente" El tiempo

$$b^n C_0$$

Ordenada al origen" Capital inicial

Si derivamos la expresión $C_n = C_0.i.n + C_0$, la derivada primera nos indica crecimiento (pendiente positiva) o decrecimiento (pendiente negativa).

- ♦ Respecto de i :

$$\frac{dC_n}{di} = C_0.n \quad \text{Pendiente positiva, por lo tanto creciente}$$

- ♦ Respecto de n :

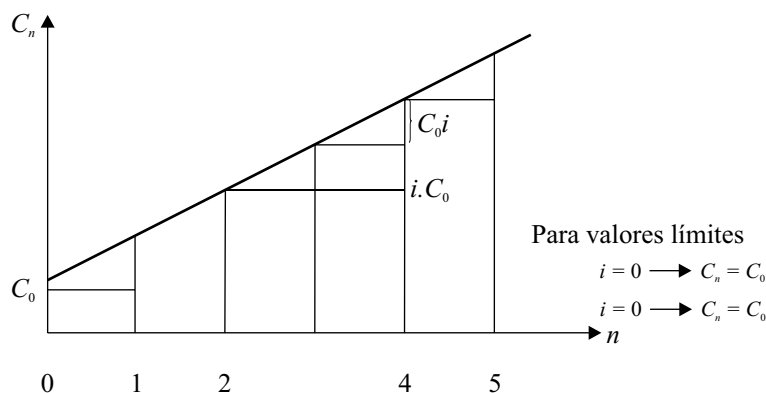
$$\frac{dC_n}{dn} = C_0.i \quad \text{Pendiente positiva, por lo tanto creciente}$$

La derivada segunda nos indica la concavidad de la función: si es positiva, cóncava hacia arriba; si es negativa, cóncava hacia abajo.

$$\frac{d^2C_n}{di^2} = 0 \quad \text{No tiene concavidad}$$

$$\frac{d^2 C_n}{dn^2} = 0 \quad \text{No tiene concavidad}$$

Gráficamente, la representación de la línea recta de pendiente positiva (creciente).



- ♦ **Ejemplo:** Dado el capital de $C_0 = \$ 1.000$, invertido por 6 períodos a una tasa de interés vencida del 4% periódica, hacer el cuadro de evolución de la operación.

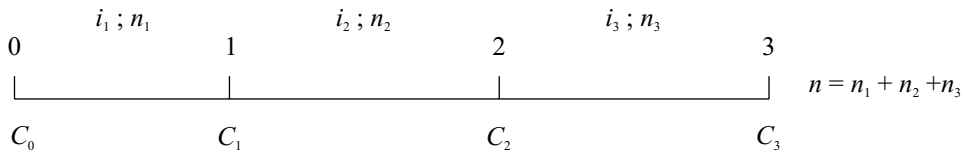
Período	Capital \$	Interés del período \$	Monto \$	Rendimiento o costo periódico
1	1.000	40	1.040	$i_1 = \frac{1.040 - 1.000}{1.000} = 0,040000$
2	1.000	40	1.080	$i_2 = \frac{1.080 - 1.040}{1.040} = 0,038462$
3	1.000	40	1.120	$i_3 = \frac{1.120 - 1.080}{1.080} = 0,037037$
4	1.000	40	1.160	$i_4 = \frac{1.160 - 1.120}{1.120} = 0,035714$
5	1.000	40	1.200	$i_5 = \frac{1.200 - 1.160}{1.160} = 0,034483$
6	1.000	40	1.240	$i_6 = \frac{1.240 - 1.200}{1.200} = 0,033333$
Totales		240		

Se puede apreciar que en cada período el rendimiento o costo efectivo no se mantiene constante (última columna) decrece en cada período de tiempo.

3.2. Interés simple – Tasa variable

Consideremos tres períodos de tiempo, no necesariamente iguales, en los que rigen tasas de interés vencido diferentes, y luego generalizaremos.

Si la tasa de interés vencida varía en cada período de tiempo:



$$\begin{aligned}
 C_1 &= C_0 + I(0;1) & C_2 &= C_1 + I(1;2) & C_3 &= C_2 + I(2;3) \\
 &= C_0 + (i_1 \cdot C_0 \cdot n_1) & &= C_1 + (i_2 \cdot C_0 \cdot n_2) & &= C_2 + (i_3 \cdot C_0 \cdot n_3)
 \end{aligned}$$

El capital final en 3 es igual al capital inicial más los intereses producidos en cada período de tiempo, con su respectiva tasa e interés, calculados siempre sobre el capital inicial C_0 .

$$\begin{aligned}
 C_3 &= C_0 + C_0 \cdot i_1 \cdot n_1 + C_0 \cdot i_2 \cdot n_2 + C_0 \cdot i_3 \cdot n_3 \\
 &= C_0 [1 + i_1 \cdot n_1 + i_2 \cdot n_2 + i_3 \cdot n_3]
 \end{aligned}
 \quad \text{ó} \quad
 C_3 = C_0 \cdot \left[1 + \sum_{h=1}^3 i_h \cdot n_h \right]$$

Generalizando para k períodos:

$$C_n = C_0 \cdot \left[1 + \sum_{h=1}^k i_h \cdot n_h \right]$$

♦ **Ejemplo:** Con los siguientes datos, calcule el capital final y los intereses totales.

- $C_0 = \$ 250$
- $i_1 = 2\%$ anual
- $i_2 = 4\%$ anal
- $i_3 = 7\%$ anual
- $n_1 = 3$ meses
- $n_2 = 5$ meses
- $n_3 = 2$ meses

Planteo:

$$\begin{aligned}
 C_3 &= C_0 \cdot (1 + i_1 \cdot n_1 + i_2 \cdot n_2 + i_3 \cdot n_3) = \\
 I(0;1) &= C_0 \cdot i_1 \cdot n_1 = 250 \cdot 0,02 \cdot \frac{3}{12} = 1,2500 \\
 I(1;2) &= C_0 \cdot i_2 \cdot n_2 = 250 \cdot 0,04 \cdot \frac{5}{12} = 4,1667 \\
 I(2;3) &= C_0 \cdot i_3 \cdot n_3 = 250 \cdot 0,07 \cdot \frac{2}{12} = 2,9167
 \end{aligned}$$

$$I(0;3) = 1,2500 + 4,1667 + 2,9167 = \$ 8,3333$$

$$\text{Rta.: } C_3 = 258,33 \quad I(0;3) = 8.3335$$

3.3. Interés simple – Tasa media o tasa promedio

Es la tasa a la que debieran haberse colocado ciertos capitales iniciales, para que al cabo del período, produzcan un capital final igual a la suma de los capitales finales producido por cada uno de ellos.

Esto es, lo hacemos para tres capitales iniciales y luego generalizamos:

Buscamos una tasa \bar{i} , que si la aplicamos a los tres capitales iniciales juntos nos daría el mismo importe que si imponemos cada capital inicial por separado, con una tasa de interés distinta cada uno de ellos, esto es:

$$C_1 = C_{01} \cdot (1 + i_1 \cdot n)$$

$$C_2 = C_{02} \cdot (1 + i_2 \cdot n)$$

$$C_3 = C_{03} \cdot (1 + i_3 \cdot n)$$

De aquí:

$$(C_{01} + C_{02} + C_{03}) \cdot (1 + \bar{i} \cdot n) = C_{01} \cdot (1 + i_1 \cdot n) + C_{02} \cdot (1 + i_2 \cdot n) + C_{03} \cdot (1 + i_3 \cdot n)$$

Aplicando distributiva:

$$(C_{01} + C_{02} + C_{03}) + (C_{01} + C_{02} + C_{03}) \cdot \bar{i} \cdot n = C_{01} + C_{01} \cdot i_1 \cdot n + C_{02} + C_{02} \cdot i_2 \cdot n + C_{03} + C_{03} \cdot i_3 \cdot n$$

Pasando al segundo miembro:

$$(C_{01} + C_{02} + C_{03}) \cdot \bar{i} \cdot n = C_{01} \cdot i_1 \cdot n + C_{02} \cdot i_2 \cdot n + C_{03} \cdot i_3 \cdot n - C_{01} - C_{02} - C_{03}$$

De donde despejamos:

$$\bar{i} = \frac{(C_{01} \cdot i_1 + C_{02} \cdot i_2 + C_{03} \cdot i_3) \cdot n}{(C_{01} + C_{02} + C_{03}) \cdot n}$$

Generalizando para k capitales iniciales:

$$\bar{i} = \frac{\sum_{h=1}^k C_{0h} \cdot i_h}{\sum_{h=1}^k C_{0h}}$$

- ♦ **Ejemplo:** Si se invierten las sumas de dinero de \$ 15.000, \$ 22.000 y \$ 23.000, con las siguientes tasas de interés: 4,50%, 5% y 6% efectivas mensuales respectivamente, por 90 días. Calcule la tasa media obtenida.

Solución:

Los capitales finales son:

$$C_1 = 15000.(1 + 0,045.3) = 17.025$$

$$C_2 = 22000.(1 + 0,05.3) = 25.300$$

$$C_3 = 23000.(1 + 0,06.3) = 27.140$$

La suma de los capitales iniciales:

$$15.000 + 22.000 + 23.000 = 60.000$$

La suma de los capitales finales:

$$17.025 + 25.300 + 27.140 = 69.465$$

Si calculamos la tasa promedio mensual aplicando la fórmula obtenida, tenemos:

$$\bar{i} = \frac{15000 \times 0,045 + 22000 \times 0,05 + 23000 \times 0,06}{15000 + 22000 + 23000} = \frac{3155}{60000} = 0,052583$$

♦ **Ejemplo:** Con estos datos:

- $C_0 = \$ 1$
- $n = 120$ días
- $i_{30} = 5\%$
- $i_{30} = 6\%$
- $i_{30} = 9\%$
- $i_{30} = 8\%$

Calcule la tasa media de la operación.

Planteo: Calculamos los intereses para cada período:

$$I(0;1) = i_1 \times C_0 \times n_1 = 0,05 \times 1 \times 1 = 0,05$$

$$I(1;2) = i_2 \times C_0 \times n_2 = 0,06 \times 1 \times 1 = 0,06$$

$$I(2;3) = i_3 \times C_0 \times n_3 = 0,09 \times 1 \times 1 = 0,09$$

$$I(3;4) = i_4 \times C_0 \times n_4 = 0,08 \times 1 \times 1 = 0,08$$

$$I(0;4) = I(0;1) + I(1;2) + I(2;3) + I(3;4) = 0,05 + 0,06 + 0,09 + 0,08 = 0,28$$

La tasa media es:

$$\bar{i} = \frac{0,05 + 0,06 + 0,09 + 0,08}{4} = 0,07 \text{ (promedio aritmético)}$$

4. INTERÉS COMPUESTO

En este caso, los intereses que se producen en cada período de tiempo son sumados al capital existente, el cual va a representar el capital inicial para el próximo período de tiempo, y así sucesivamente hasta completar el plazo total.

Buscamos la expresión que se obtiene cuando los intereses producidos en cada período son integrados al capital, es decir, cuando hay una capitalización de los intereses pasan a formar parte del capital para el período siguiente.

Graficamos la operación financiera:

0	i	1	i	2	i	n	
		$C_1 = C_0 + I(0;1)$			$C_2 = C_1 + I(1;2)$...	$C_n = C_{n-1} + I(n-1;n)$
C_0		$C_1 = C_0 + i.C_0$ $= C_0.[1 + i]$		$C_2 = C_1 + i.C_1$ $= C_0.[1 + i] + i.C_0.[1 + i]$ $= C_0.[1 + i]^2$			

Y así hasta el período enésimo:

$$C_n = C_0.[1 + i]^n$$

Generalizamos:

- ♦ Para el primer período ($n = 1$):

$$C_1 = C_0 + i.C_0 = C_0.[1 + i]$$

- ♦ Para el segundo período ($n = 2$):

$$C_2 = C_1 + i.C_1 = C_1.(1 + i) + i.C_0.(1 + i) = C_0.(1 + i).(1 + i) = C_0.[1 + i]^2$$

- ♦ Para el tercer período ($n = 3$):

$$C_3 = C_2 + i.C_2 = C_1 + i.C_1 + i.[C_1 + i.C_1] = C_0.[C_0 + i]^3$$

.....

- ♦ Para el período "p" ($n = p$):

$$C_p = C_{p-1} + i.C_{p-1} = C_{p-1}.[1 + i] = C_0.[C_0 + i]^p$$

- ♦ Para el período “n” ($n = n$):

$$C_n = C_{n-1} + i.C_{n-1} = C_0.[1 + i]^n$$

La expresión financiera para calcular el capital final en régimen de capitalización compuesta es:

$$(7) \quad C_n = C_0.(1 + i)^n$$

Observemos que en este caso se trata de una progresión geométrica; cada elemento se va formando al multiplicar al anterior por la razón “q”, esto es, “(1 + i)”.

4.1. Interés compuesto – Representación gráfica del capital final

Esta expresión se corresponde con una función del tipo exponencial creciente, de la forma:

$$y = k.a^x$$

Siendo $a > 1$

Entonces, por comparación:

$$y = k.a^x$$

$$C_n = C_0.(1 + i)^n$$

La similitud por cada término será:

$$y^n C_n$$

Variable dependiente”El monto

$$k^n C_0$$

Constante”Capital inicial

$$a^n 1 + i$$

Constante”Monto de \$ 1 en un período de tiempo

$$x^n n$$

Variable independiente”El tiempo

Gráficamente, si consideramos valores límites (o valores extremos):

$$n = 0 \textcircled{R} C_n = C_0$$

$$i = 0 \textcircled{R} C_n = C_0$$

$$n \textcircled{R} \textcircled{P} C_0 (1 + i)^n \textcircled{R} \textcircled{P}$$